• FOLHA Nº 06 – GABARITO COMENTADO •

1) De acordo com o texto, 10 alunos gostam de geometria mas não gostam de álgebra, logo 10 gostam exclusivamente de geometria.

Como 5 gostam tanto de álgebra quanto de geometria e 22 gostam de álgebra, temos que 17 gostam exclusivamente de álgebra.

Com isso, o total de alunos é dado pela soma: $10 + 5 + 17 + 4 = 36$ alunos

OPÇÃO C

2) Para que seja divisível por 5, **y** deve ser igual a **0** ou a **5**. Obviamente escolheremos **0** pois é o menor.
Somando os algarismos conhecidos temos: $\mathbf{3 + 2 + 8 + 4 + 0 = 17}$
Após **17**, o próximo número divisível por três é o **18**, portanto devemos atribuir **1** a **x**.
Logo:
• $x = 1$, $y = 0$.
OPÇÃO B

3) Seja x, o total de figurinhas.
Podemos escrever x como:
$X = 12q + 7$
$X = 15q' + 7$
$X = 24q'' + 7.$
Logo x pode ser escrito como
$X = \text{mmc}(12, 15, 24)k + 7$
$X = 120k + 7$
Como o número de figurinhas está compreendido entre 240 e 360, k só pode ser 2. Logo
$X = 247$
$2 + 4 + 7 = 13$
OPÇÃO D

4) Nenhum dos inteiros em questão é uma potência de um primo *p* pois caso contrário todos os outros inteiros teriam o fator *p* em comum e isso não é permitido. Logo *d* possui pelo menos dois fatores primos distintos. Além disso, um dos números a*, b, c, d* é ímpar; caso contrário mdc $(a, b, c, d) = 2$. Assim, como o menor número ímpar com dois fatores primos distintos é 15, $d \le 15$. Para $d = 15$, temos como exemplo $a = 6$, $b = 10$, $c = 12$ e $d = 15$
OPÇÃO C

5) Mdc $(A,B) = 17$
$A = 17m$ e $B = 17n$
$A + B = 17(m + n)$, como $A + B = 136$
$m + n = 8$
Suponha $A > B$, logo $A < 2B$. com isso, $m > n$ e $m < 2n$. temos as seguintes possibilidades:
$m + n = 7 + 1$, não serve pois $m < 2n$
$m + n = 6 + 2$, não serve pois $m < 2n$
$m + n = 5 + 3$, atende as condições do problema.
$m + n = 4 + 4$, não serve pois $m < 2n$
logo $m = 5$ e $n = 3$, logo:
$A - B = 17(m - n) = 17(5 - 3) = 34.$

OPÇÃO C

6) M.M.C.(12, 15, 24) = 120 (esse deixa resto zero, pois é multiplo) como o intervalo é 240 < **total de figurinhas** < 360, então:

120 + 120 = 240 = 7 = 247

Soma: 2 + 4 + 7 = 13.

OPÇÃO D

7) Mdc(198, 165) = 33

S1 = 165 . 198

S2 = 33 . 33

S1/S2 = 30

OPÇÃO B

8) E = 40

$C = E \,.\, 2 \rightarrow C = 80$

$B = C \,.\, 1 + E \rightarrow B = 80 \,.\, 1 + 40 = 120$

A = B . 1 + D, como C = D

$A = B + C \rightarrow A = 120 + 80 = 200$

A + B + C = 200 + 120 + 80 = 400

OPÇÃO A

9) O máximo divisor comum deve dividir a diferença entre quaisquer dois desses números. Note que 123456798 – 123456789 = 9 e assim o máximo divisor comum é no máximo 9. Pelo critério de divisibilidade por 9, como 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45 é divísivel por 9, temos que 9 realmente divide todos esses números.

OPÇÃO B

10) O comprimento total T de tela, necessário para cercar a área, é $T = 2 \,.\, 81 + 190 \therefore T = 352$ m.

Cada rolo contém 48 metros e 352/48 = 7,33, logo a quantidade mínima de rolos é 8.

OPÇÃO C

11) Utilizaremos a notação $a|b$ para dizer que b é divisível por a. Então $30|72N \Leftrightarrow 5|12N \Leftrightarrow 5|N$.

Além disso, $72|30N \Leftrightarrow 12|5N \Leftrightarrow 12|N$. Logo N é múltiplo de 5 e 12, ou seja, é múltiplo de 60. Então $N \geq 60$. Note que N = 60 é possível, pois $60|30 \cdot 72$

OPÇÃO A

12) Como a em inverso b, temos:

ab = 1

$a + b = 2 \rightarrow b = 2 - a$

$a(2 - a) = 1 \rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \rightarrow (a - 1)^2 = 0$

a = 1 e b = 1

$(1^3 + 1^3) \,.\, (1^4 - 1^4) = 0$

OPÇÃO E

13) Da primeira equação temos que z = 2x – 3y. Substituindo na segunda, temos:

$x + 3y - 14(2x - 3y) = 0$

$x - 28x + 3y + 42y = 0$

$45y - 27x = 0$

$x = 5y/3$

$z = 10y/3 - 3y$

$z = y/3$

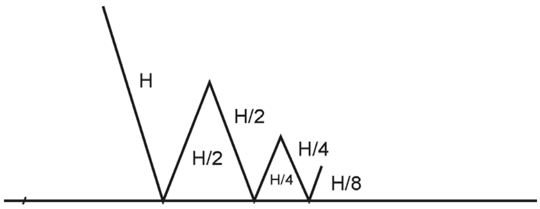
$$\frac{\left(\frac{5y}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{5y}{3}\right)y}{y^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2} = \frac{\frac{25y^2}{9} + 5y^2}{y^2 + \frac{y^2}{9}} = \frac{\frac{70y^2}{9}}{\frac{10y^2}{9}} = 7$$

OPÇÃO B

14) Seja x a idade de Neto em 1994. Então a idade de sua avó no mesmo ano era 2x. Os anos de nascimento dos dois são 1994 – x e 1994 – 2x, respectivamente. Logo 1994 – x + 1994 – 2x = 3844, ou seja, x = 48. Neto completa 48 + 2006 – 1994 = 60 anos em 2006.

OPÇÃO C

15) Observe o esquema:



$$\frac{H}{8} = 100$$

H = 800 cm = 8 m

OPÇÃO C

16) x = nº de notas de R$ 5

y = nº de notas de R$ 10

$x + y = 10$

$5x + 10y = 65 \rightarrow 5(x + y) + 5y = 65$

$50 + 5y = 65$

$5y = 15$

Y = 3. Logo x = 7

$x.y = 21$

OPÇÃO D

17) $a^3 = 92 + 3a$

$k = a(a^3 - 6) + 1$

$k = a(92 + 3a - 6) + 1$

$k = 3a^2 + 86a + 1$

OPÇÃO A

18) $\begin{cases} a^2x + y = 1 \\ x + y = a \end{cases}$

Sistema Possível e Determinado: $\dfrac{a^2}{1} \neq \dfrac{1}{1}$

Sistema Possível e Indeterminado: $\dfrac{a^2}{1} = \dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{a}$

Sistema Impossível: $\dfrac{a^2}{1} = \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{1}{a}$

OPÇÃO A

19)

	GARFOS	FACAS	COLHERES	TOTAL
AÇO COMUM	6	5	7	18
AÇO INOX	X	Y	Z	12

I) $6 + x = 2y \rightarrow x = 2y - 6$

II) $y = z + 2 \rightarrow z = y - 2$

III) $x + y + z = 12$

Pondo I e II em III, temos:

$2y - 6 + y + y - 2 = 12$

$4y = 20$

$y = 50$

Como $z = y - 2 \rightarrow z = 5 - 2 \rightarrow z = 3$

Daí o número de colheres é igual a 7 + 3 = 10

OPÇÃO A

20) Se S é o valor do sanduíche, C o do café, T o da torta:

$3S + 7C + T = 31{,}50$ (i)

$4S + 10C + T = 42{,}00$ (ii)

Fazendo 4·(i) – 3·(ii):

$28C - 30C + 4T - 3T = 126 - 126 \rightarrow T = 2C$

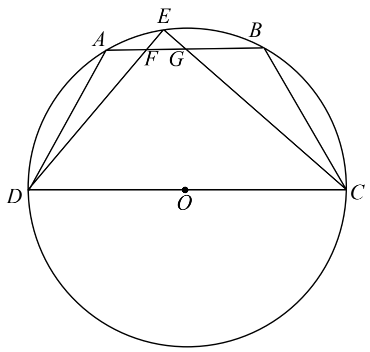
Fazendo (ii) – (i):

$S + 3C = 10{,}5 \rightarrow S + C = 10{,}5 - 2C \rightarrow S + C + T = 10{,}5 + T - 2C \rightarrow S + C + T = 10{,}5$

Portanto, o consumo solicitado totaliza o valor de R$ 10,50.

OPÇÃO D

21)



Como $A\hat{B}E \cong A\hat{D}E$ (ambos enxergam o arco $\overset{\frown}{AE}$) temos que $\Delta FBE \sim \Delta FDA$ e portanto $\dfrac{FB}{FD} = \dfrac{BE}{DA}$ (1)

Analogamente, das semelhanças $\Delta EBG \sim \Delta ACG$, $\Delta AEG \sim \Delta CBG$ e $\Delta AEF \sim \Delta DBF$ obtemos respectivamente

$\dfrac{BG}{CG} = \dfrac{EB}{AC}$ (2) $\qquad \dfrac{AE}{CB} = \dfrac{AG}{CG}$ (3) $\qquad \dfrac{AE}{DB} = \dfrac{AF}{DF}$ (4)

Assim, utilizando o fato que $ABCD$ é isósceles (de modo que $AD = BC$ e $BD = AC$) temos

$$\frac{AF \cdot BG}{FG} \overset{(2)\text{ e }(4)}{=} \frac{1}{FG} \cdot \frac{AE \cdot DF}{DB} \cdot \frac{CG \cdot EB}{AC}$$

$$= \frac{1}{AC^2} \frac{(AE \cdot CG)(DF \cdot EB)}{FG} \overset{(1)\text{ e }(3)}{=} \frac{AD^2}{AC^2} \cdot \frac{AG \cdot BF}{FG}$$

$$= \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 \frac{(AF + FG)(BG + FG)}{FG}$$

$$= \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 \frac{FG(AF + FG + BG) + AF \cdot BG}{FG}$$

$$= \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 \cdot \left(AB + \frac{AF \cdot BG}{FG}\right)$$

Em suma, temos

$$\frac{AF \cdot BG}{FG} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 \cdot \left(AB + \frac{AF \cdot BG}{FG}\right)$$

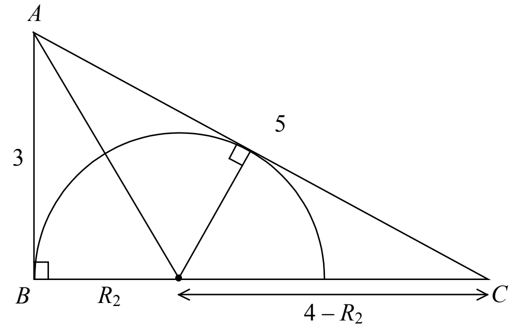
$$\Leftrightarrow \frac{AF \cdot BG}{FG} = \frac{AD^2 \cdot AB}{AC^2 - AD^2}$$

Utilizando o fato de que $ABCD$ é isósceles com base $CD = 50$ e altura 24, aplicando Pitágoras várias vezes é fácil calcular $AB = 14$, $AD = 30$, $AC = 40$.

Assim, $\dfrac{AF \cdot BG}{FG} = 18$.

OPÇÃO C

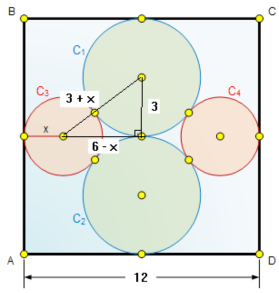
22) Inicialmente, observe que o triângulo *ABC* é retângulo em *B*. Veja figura a seguir.



Veja que o centro da circunferência de raio R_2 está sobre a bissetriz interna do ângulo *A*. Logo, pelo teorema da bissetriz interna, temos $\frac{R_2}{3} = \frac{4 - R_2}{5}$, de onde obtemos $R_2 = \frac{3}{2}$. Por outro lado, a área de *ABC* é dada por $p \cdot R_1$, em que *p* é o semi-perímetro. Daí, segue-se que $\frac{3+4+5}{2} \cdot R_1 = \frac{3 \cdot 4}{2}$, de modo que $R_1 = 1$. Portanto, $\frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{3}$.

OPÇÃO B

23) Aplicando Pitágoras no triângulo em destaque temos:



$(3+x)^2 = (6-x)^2 + 9 \rightarrow 9 + 6x + x^2 = 36 - 12x + x^2 + 9$. Daí; $18x = 36$; $x = 2$

OPÇÃO D

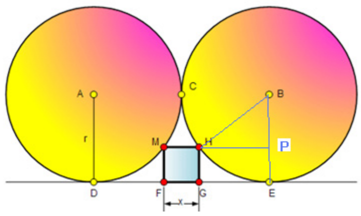
24) Observe que o triângulo BHP é retângulo e os catetos são $r - x$ e $r - \frac{x}{2}$ e a hipotenusa igual a r.

Aplicando Pitágoras temos:

$r^2 = (r - x)^2 + (r - \frac{x}{2})^2$

$r^2 = r^2 - 2rx + x^2 + r^2 - rx + \frac{x^2}{4}$;

resolvendo a equação temos: $\frac{r}{x} = \frac{5}{2}$



25) Observe que o triângulo BCE é semelhante ao triângulo CFG

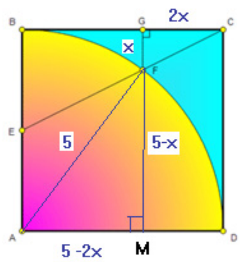
$5^2 = (5 - 2x)^2 + (5 - x)^2$

$25 = 25 - 20x + 4x^2 + 25 - 10x + x^2$

$5x^2 - 30x + 25 = 0$ (: 5) temos:

$(x - 1)(x - 5) = 0$.

Daí, $x = 1$

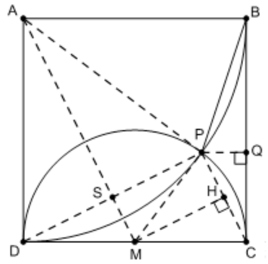


OPÇÃO B

26) Seja *O* o ponto de interseção entre as retas *AB* e *CD*. Veja que os triângulos *ODA* e *OBC* são semelhantes, pois $\angle OAD = 180° - \angle DAB = \angle BCA$. Logo, podemos igualar a razão de semelhança à razão entre os raios das circunferências inscritas, bem como das ex-inscritas, obtendo: $\frac{8}{R} = \frac{R}{18} \rightarrow R^2 = 144 \rightarrow R = 12$

OPÇÃO C

27) Considere a figura.



Sejam Q, S e H, respectivamente, o pé da perpendicular baixada de P sobre BC, a interseção de AM com DP e o pé da perpendicular baixada de M sobre CP

Queremos calcular $\overline{PQ}$.

Como $\overline{AB} = \overline{AP} = 4\,\text{cm}$, $\overline{MD} = \overline{MP} = 2\,\text{cm}$ e AM é lado comum, segue-se que os triângulos ADM e APM são congruentes por LLL. Desse modo, AM é mediatriz de DP.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo APM, vem

$$\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{MP}^2 \Leftrightarrow \overline{AM}^2 = 4^2 + 2^2$$
$$\Rightarrow \overline{AM} = 2\sqrt{5}\,\text{cm}.$$

Além disso, temos

$$\overline{MP}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{MS} \Leftrightarrow 2^2 = 2\sqrt{5} \cdot \overline{MS}$$
$$\Leftrightarrow \overline{MS} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\text{cm}.$$

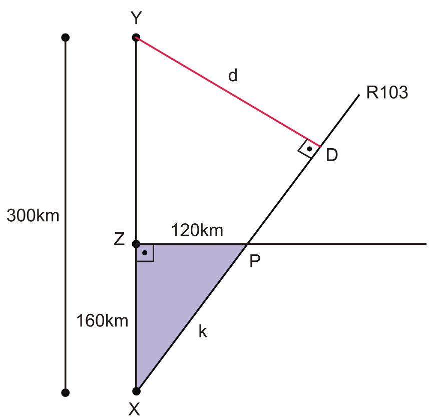
É fácil ver que o triângulo CPD é retângulo em P. Logo, $\overline{HP} = \overline{MS}$. Por outro lado, $\overline{CM} = \overline{MP}$ e $HM \perp CP$ implica em $\overline{CH} = \overline{HP}$. Daí, $\overline{CP} = 2 \cdot \overline{HP} = \frac{4}{\sqrt{5}}\,\text{cm}$.

Finalmente, como os triângulos HMP e QCP são semelhantes, encontramos

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{HP}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{MP}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PQ}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \overline{PQ} = \frac{4}{5}.$$

OPÇÃO A

28)



Determinando o valor de k no triângulo XZP:

$K^2 = 120^2 + 160^2$

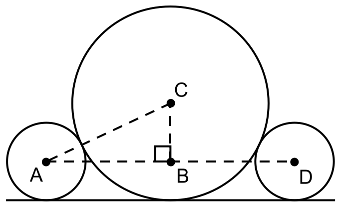
K = 200 km.

$\Delta XZP \sim \Delta XDY$

$$\frac{200}{300} = \frac{120}{d} \Leftrightarrow 2d = 360 \Leftrightarrow d = 180\text{km}$$

OPÇÃO E

29) Considere a figura.



Sabendo que $\overline{AC} = R + r$ e $\overline{BC} = R - r$, pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow (R+r)^2 = \overline{AB}^2 + (R-r)^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 4Rr$$
$$\Rightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{Rr}.$$

Portanto, como $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{AB}$, segue que o resultado pedido é $2 \cdot 2\sqrt{Rr} = 4\sqrt{Rr}$.

OPÇÃO A

30) Seja (AEF) = 2S. Pela simetria da figura, temos (EBDF) = (BDHG) = S. Além disso, os triângulos AEF e ABD são semelhantes por AA.

Portanto, como (ABD) = (AEF) + (EBDF) = 3S, tem-se

$$\frac{(AEF)}{(ABD)} = \left(\frac{x}{b}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{2S}{3S} = \left(\frac{x}{b}\right)^2$$
$$\Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

que é o resultado pedido.

OPÇÃO E